ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024
ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ'ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 31

Α2 (α) Σχολ. Βιβλίο σελ. 65

(β) Σχολ. Βιβλίο σελ. 86 – 87

Α3. (α) Λ **(β)** Λ **(γ)** Σ **(δ)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.

Θα είναι: $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=x^2-6x+5$.

Β2. Έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=36-20=16$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{6\pm4}{2}=\begin{cases}\frac{6+4}{2}=5\\ \frac{6-4}{2}=1\end{cases}$$

x	-∞	1	5	+∞
f'(x)	+	-	+	
f(x)	↗	↘	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και στο $[5,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$.

Η f παρουσιάζει στο $x_1=1$ μέγιστο, ίσο με $f(1)=\frac{1}{3}-3+5+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$.

Η f παρουσιάζει στο $x_2=5$ ελάχιστο, ίσο με $f(5)=\frac{125}{3}-75+25+\frac{1}{3}=-8$.

Β3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης θα είναι ίσος με την παράγωγο της f στο $x_0=0$. Επομένως: $\lambda=f'(0)=5$ και $f(0)=\frac{1}{3}$.

Οι συντεταγμένες του σημείου $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης,

οπότε: $y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow \frac{1}{3}=5\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{3}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y=5x+\frac{1}{3}$.

Β4. Το ζητούμενο όριο, είναι το όριο της παραγώγου της f στο –1. Άρα:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=(-1)^2-6(-1)+5=12.$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Υπολογίζοντας το όριο έχουμε:

$$s=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+7}{2}=\frac{8}{2}=4$$

αφού, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=36+28=64$, άρα $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-6\pm 8}{2}=\begin{cases}\frac{-6+8}{2}=1\\ \frac{-6-8}{2}=-7\end{cases}$

οπότε, $x^2+6x-7=(x-1)(x+7)\ (1)$.

Γ2. Δεδομένου ότι $CV=20\%$, θα έχουμε:

$$CV=0,2 \Leftrightarrow \frac{s}{|\overline{x}|}=0,2 \Leftrightarrow \frac{4}{|\overline{x}|}=0,2 \Leftrightarrow |\overline{x}|=\frac{4}{0,2}=20 \Leftrightarrow |\overline{x}|=20 \Leftrightarrow \overline{x}=20 \text{ ή } \overline{x}=-20.$$

Με βάση το ζητούμενο στο ερώτημα έχουμε $\overline{x}=20$.

Γ3. Εφόσον $\overline{x}=20$, τότε θα είναι:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}\Leftrightarrow 20=\frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5}\Leftrightarrow 20=\frac{90+\kappa}{5}\Leftrightarrow 90+\kappa=100\Leftrightarrow \kappa=10.$$

Πλέον οι παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά γίνονται: 14 , 16 , 18 , 22 , 30.

Η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, συνεπώς: $\delta=18$.

Γ4. Οι νέες τιμές θερμοκρασίας y_i πλέον θα διαμορφώνονται ως εξής:

$$y_i = \frac{10}{100}\cdot x_i + x_i = \frac{110}{100}\cdot x_i = 1{,}1\cdot x_i \ , \quad i = 1,\dots,5$$

Άρα $\bar{y} = 1{,}1\cdot\bar{x} = 1{,}1\cdot 20 = 22$, οπότε, $s_y = |1{,}1|\cdot s_x = 1{,}1\cdot 4 = 4{,}4$.

Συνεπώς: $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4{,}4}{22} = 0{,}2 = 20\%$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10^2 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{100 - x^2}.$$

Συνεπώς ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = y = \sqrt{100 - x^2}$.

Θα πρέπει $100 - x^2 > 0$, αφού $y > 0$.

Άρα $100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 10$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0,10)$.

Δ2. Για κάθε $x \in (0,10)$, έχουμε :

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} = \frac{(100 - x^2)'}{2\sqrt{100 - x^2}} = -\frac{2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x για x = 8 , είναι:

$$f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{100 - 8^2}} = -\frac{8}{\sqrt{36}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

Δ3. Το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x) - 8}{x - 6} = \lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100 - x^2} - 8}{x - 6} = \lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100 - x^2} - 8\right)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100 - x^2}^2 - 64}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{36 - x^2}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{(6 - x)(6 + x)}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{-(x - 6)(6 + x)}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{-(6 + x)}{\sqrt{100 - x^2} + 8} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}.$$

Δ4. Έχουμε $f'(x) = \sqrt{100 - x^2} = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} < 0$, για κάθε $x \in (0,10)$. Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (0,10)$. Είναι x_1, x_2, $x_3 \in (0,10)$, με

$2,3 < 2,8 < 3,5 \Leftrightarrow x_1 < x_3 < x_2$. Εφόσον f γνησίως φθίνουσα, τότε

$x_1 < x_3 < x_2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.